8. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet.

$$y' = \frac{4}{2x - y}$$

① $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ ② $u(x) = ax + by(x)$

$u(x) := 2x - y(x)$ $\quad y(x) = 2x - u(x) \Rightarrow y'(x) = 2 - u'(x)$

Új egyenlet: $2 - u'(x) = \frac{4}{u(x)}$

$\boxed{u'(x) = 2 - \frac{4}{u(x)} = \frac{2u(x) - 4}{u(x)}}$ szeparálható d.e.

$\frac{du}{dx} = \frac{2u-4}{u}$ $\quad$ $u \equiv 2$ m.o. $\Rightarrow \int \frac{u}{2u-4}\,du = \int 1\,dx$

bo: $\int \frac{u}{2u-4}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{u}{u-2}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{u-2+2}{u-2}\,du = \frac{1}{2}\int 1\,du + \frac{1}{2}\int \frac{2}{u-2}\,du = \frac{1}{2}(u + 2\ln|u-2|) + C_1$ $(C_1 \in \mathbb{R})$

jo: $\int 1\,dx = x + C_2$ $\quad (C_2 \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow \frac{u(x)}{2} + \ln|u(x) - 2| = x + C$ $\quad (C \in \mathbb{R})$

M.o.-ok

I. $2x - y(x) = 2 \Leftrightarrow y(x) = 2x - 2$

II. $\frac{2x - y(x)}{2} + \ln|2x - y(x) - 2| = x + C$ $\quad (C \in \mathbb{R})$

(c) $y''' + 2y'' + y' + 2y = \mathrm{sh}(2x) = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x})$

kar. egy: $\underbrace{\lambda^3 + 2\lambda^2}_{\lambda^2(\lambda+2)} + \lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+2)(\lambda^2+1) = 0$ $\quad$ gyökök: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = \pm i$

$y_{h,á}(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 \cdot \cos(x) + C_3 \sin(x)$ $\quad (x \in \mathbb{R}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R})$

Az inhomogén egy. part. mo.-át keressük $\cancel{y(x) = A \cdot e^{2x} + \underbrace{B \cdot e^{-2x}}_{\text{rezonancia}}}$ helyett $y(x) = A \cdot e^{2x} + B x \cdot e^{-2x}$ alakban!

$2 /\ y(x) = A \cdot e^{2x} + B x \cdot e^{-2x}$

$1 /\ y'(x) = 2A \cdot e^{2x} + e^{-2x}(-2Bx + B)$

$2 /\ y''(x) = 4A \cdot e^{2x} + e^{-2x}(4Bx - 4B)$

$1 /\ y'''(x) = 8A \cdot e^{2x} + e^{-2x}(-8Bx + 12B)$

$\Rightarrow$ d.e.-be behelyettesítve,

$20A \cdot e^{2x} + 5B e^{-2x} = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} \cdot e^{-2x}$

$A = \frac{1}{40}$ $\quad B = -\frac{1}{10}$ $\Rightarrow y_{i,p}(x) = \frac{1}{40} \cdot e^{2x} - \frac{1}{10} x \cdot e^{-2x}$ $(x \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow y_{i,á}(x) = y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) = \frac{1}{40} \cdot e^{2x} - \frac{1}{10} x \cdot e^{-2x} + C_1 e^{-2x} + C_2 \cdot \cos(x) + C_3 \sin(x)$ $\quad (x \in \mathbb{R}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R})$

4.gyak/5/6 Konvergens-e az alábbi num. sor.

b) $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{n^3 + 3n - 5}{2n^7 + 4n^3 + 5n} = b_n$

Áll: $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{n^\alpha}$ konv $\Leftrightarrow \alpha > 1$ $\quad \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{n} \text{ div.}, \ \sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{n^2} \text{ konv.}\right)$

$\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{n^4}$ -re hasonlít' $\quad$ Sejtés: $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} b_n$ konv.

$0 \underset{n \geq 2}{\leq} b_n = \frac{n^3 + 3n - 5}{2n^7 + \underbrace{4n^3 + 5n}_{\geq 0}} \leq \frac{n^3 + 3n^3}{2n^7} = \frac{4n^3}{2n^7} = \frac{2}{n^4} \left(\leq \frac{2}{n^2}\right)$ $\quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ $\quad \sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{2}{n^4}$ konv.

majoráns krit. $\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}^+} b_n$ konv.

2. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi sorok konvergensek. Adjunk becslést az elkövetett hibára, ha a sor összegét a **100.** részletösszeggel közelítjük.

a) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n+3)5^{n-2}}{(n+4)n!} = a_n$ *b)* $\sum_{n\in\mathbb{N}^+}\left(\frac{2n+3}{8n-2}\right)^{2n}$

a)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+4)\cdot \cancel{5^{n-1}}}{(n+5)\cdot(n+1)\cancel{!}}\cdot\frac{(n+4)\cancel{n!}}{(n+3)\cancel{5^{n-2}}} = \frac{5(n+4)^2}{(n+5)(n+1)(n+3)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0<1 \overset{\text{hányadoskrit}}{\Longrightarrow} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ konv.}$$

hibabecslés:

$$\left|\sum_{n=0}^\infty a_n - \sum_{n=0}^{100} a_n\right| = \sum_{n=101}^\infty a_n \le$$

$$a_n = \frac{(n+3)5^{n-2}}{(n+4)n!} \le \frac{5^{n-2}}{n!}$$

$$\frac{5^{99}}{101!}+\frac{5^{100}}{102!}+\frac{5^{101}}{103!}+\dots = \frac{5^{99}}{101!}\left(1+\frac{5}{102}+\frac{5^2}{103\cdot102}+\dots\right) \le$$

$$\le \frac{5^{99}}{101!}\left(1+\frac{5}{102}+\frac{5^2}{102^2}+\frac{5^3}{102^3}+\dots\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=101}^\infty a_n \le \frac{5^{99}}{101!}\cdot\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{5}{102}\right)^n = \frac{5^{99}}{101!}\frac{1}{1-\frac{5}{102}} = \frac{5^{99}}{101!}\cdot\frac{102}{97}$$

b) $\sum_{n\in\mathbb{N}^+}\underbrace{\left(\frac{2n+3}{8n-2}\right)^{2n}}_{b_n}$

$$\sqrt[n]{b_n} = \left(\frac{2n+3}{8n-2}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(\frac{2}{8}\right)^2 = \frac{1}{16}<1 \overset{\text{gyökkrit}}{\Longrightarrow} \sum_{n\in\mathbb{N}^+} b_n \text{ konv.}$$

hibabecslés:

$$\left|\sum_{n=1}^\infty b_n - \sum_{n=1}^{100} b_n\right| = \sum_{n=101}^\infty\left(\frac{2n+3}{8n-2}\right)^{2n} \le \sum_{n=101}^\infty\left(\frac{5\cancel{n}}{6\cancel{n}}\right)^{2n} = \left(\frac{5}{6}\right)^{202}\cdot\underbrace{\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{25}{36}\right)^n}_{\frac{1}{1-\frac{25}{36}}} = \left(\frac56\right)^{202}\cdot\frac{36}{11}$$

5. feladat (6+10=16 pont)
a) Mikor nevezünk egy numerikus sort abszolút konvergensnek? Mi a kapcsolat egy sor konvergenciája és abszolút konvergenciája között?
b) Konvergens-e a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+}(-1)^n\frac{(n+1)!}{(n+3)n^n} = b_n$$

numerikus sor?

a) $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numer. sor absz. konv. $\overset{\text{def}}{\iff} \sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|$ konv.

Áll: Minden absz konv. sor konv.

b)

$$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{(n+2)\cancel{!}}{(n+4)(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{(n+3)n^n}{\cancel{(n+1)!}} = \frac{(n+3)(n+2)}{(n+4)(n+1)}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \underbrace{\frac{(n+3)(n+2)}{(n+4)(n+1)}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1}\cdot\frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac1n\right)^n}_{\xrightarrow{n\to\infty} e}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac1e<1$$

$\overset{\text{hányadoskrit}}{\Longrightarrow} \sum_{n\in\mathbb{N}}|b_n|$ konv. $\overset{a)}{\Longrightarrow} \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ konv.

4. feladat (8+8+8=24 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\sum_{n\in\mathbb{N}^+}\frac{(-1)^n}{n^2\ln(n+1)}$ $= a_n$ *b)* $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^3}$ *c)* $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)^{n^3}\cdot\frac{n^n}{n!}$

a)

$$|a_n| = \frac{1}{n^2\ln(n+1)} \le \frac{1}{n^2} \quad (n\in\mathbb{N}, n\ge2), \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^+}\frac{1}{n^2} \text{ konv.}$$

$\ln(n+1) \ge \ln(e) = 1$, $n\ge2$

$\overset{\text{majoráns}}{\Longrightarrow} \sum_{n\in\mathbb{N}^+}|a_n|$ konv. $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konv.

[2. mo: Leibniz-krit
- $|a_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$
- $\sum a_n$ alternál
- $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ mon. csökk, mert $n\mapsto n^2\ln(n+1)$ szt. mon. növő $\Rightarrow$ rec. mon. csökk.

$\overset{\text{Leibniz krit}}{\Longrightarrow} \sum_{n\in\mathbb{N}^+} a_n$ konv.]